La formazione di struttura

Teoria di Jeans dell'instabilità gravitazionale.
Fluido inizialmente omogeneo e isotropo. Si introducono piccole perturbazioni nella distribuzione di densità:

$$\rho(\vec{r},t) = \bar{\rho}(t) + \delta\rho(\vec{r},t)$$

Le equazioni che descrivono un fluido auto-gravitante sono quelle di **continuità**, di **Eulero** e di **Poisson**:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\rho\vec{v} = 0 \\ &\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\phi = 0 \\ &\nabla^2\phi - 4\pi G\rho = 0 \end{aligned}}$$

Nel caso p=0, queste equazioni hanno la soluzione speciale esatta:

$$\rho(t) = \rho_0 a^{-3}(t); \qquad \vec{v}(\vec{r},t) = H(t)\vec{r}$$

Teoria delle perturbazioni lineari

Introducendo piccole perturbazioni lineari nelle quantità rilevanti, le equazioni diventano, al prim'ordine nelle perturbazioni:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \bar{\rho}\vec{\nabla}\cdot\delta\vec{v} = 0 \\ &\frac{\partial\delta\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)\vec{\nabla}\delta\rho + \vec{\nabla}\delta\phi = 0 \\ &\nabla^2\delta\phi - 4\pi G\delta\rho = 0 \end{aligned}$$

Queste si possono combinare per formare un'unica equazione differenziale del second'ordine:

$$\boxed{\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} - c_s^{\,2}\nabla^2\delta\rho - 4\pi G\bar{\rho}\delta\rho = 0}$$

dove abbiamo introdotto la velocità del suono (adiabatica): $c_s^{\,2} \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right) = \frac{\delta p}{\delta\rho}$

Cerchiamo soluzioni del tipo (onda piana):

$$\delta\rho(\vec{r},t) = A\overline{\rho}\exp\left[-i\vec{k}\cdot\vec{r} + i\omega t\right]$$

Deve allora valere la **relazione di dispersione**:

$$\omega^2 = c_s^{\,2}k^2 - 4\pi G\overline{\rho}$$

Definiamo il **numero d'onda di Jeans**:

$$\boxed{k_J \equiv \left(\frac{4\pi G\overline{\rho}}{c_s^{\,2}}\right)^{1/2}}$$

Questo numero d'onda separa l'evoluzione temporale delle perturbazioni in due regimi distinti

$k < k_J \Rightarrow \omega$ immaginario

Soluzioni **esponenzialmente crescenti**

$k > k_J \Rightarrow \omega$ reale

Soluzioni **oscillanti (onde acustiche)**

L'interpretazione fisica è molto semplice. Definiamo la **lunghezza d'onda di Jeans**:

$$\boxed{\lambda_J \equiv \frac{2\pi}{k_J} = \left(\frac{c_s^{\,2}\pi}{G\overline{\rho}}\right)^{1/2}}$$

Consideriamo una perturbazione di dimensione λ

Il tempo scala per il collasso gravitazionale è: $t_{\rm grav} = (\mathrm{Im}\,\omega)^{-1} \approx (G\overline{\rho})^{-1/2}$

Ma il tempo di risposta della pressione è: $t_{\rm press} \approx \lambda/c_s$

Quindi, se il tempo della risposta della pressione è lungo rispetto a quello del collasso (dimensione della perturbazione maggiore della lunghezza di Jeans) le forze di pressione non riescono a opporsi al collasso e la perturbazione cresce esponenzialmente. Viceversa, si crea un equilibrio tra pressione e gravità che dà luogo a oscillazioni.

Si può anche riformulare il tutto in termini della massa della perturbazione, introducendo la **massa di Jeans** :

$$\boxed{M_J \equiv \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3\overline{\rho} = \frac{\pi^{5/2}}{6}\frac{c_s^{\,3}}{G^{3/2}\overline{\rho}^{1/2}}}$$

La teoria di Jeans è utile per descrivere il collasso gravitazionale di qualsiasi struttura dell'universo (stelle, galassie, ecc.).

Se consideriamo perturbazioni su scale molto grandi, però, non possiamo trascurare l'espansione dell'universo. In questo caso, anche le quantità imperturbate (e quindi i coefficienti delle equazioni) dovranno dipendere dal tempo. Le soluzioni saranno del tipo:

$$\delta(\vec{r},t) \equiv \frac{\delta\rho(\vec{r},t)}{\overline{\rho}} = \int \frac{d^3r}{(2\pi)^3}\delta_k(t)\exp\left[\frac{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}{a(t)}\right]$$

e l'equazione per la perturbazione di densità diventa:

$$\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k + \left(\frac{c_s^2k^2}{a^2} - 4\pi G\overline{\rho}\right)\delta_k = 0 \qquad k_J \equiv \left(\frac{4\pi G\overline{\rho}a^2}{c_s^2}\right)^{1/2}$$

L'espansione entra nell'equazione come un termine di viscosità, rallentando la crescita delle perturbazioni: non più esponenziale, ma solo a legge di potenza

Durante l'epoca della materia:

$$k << k_J \Rightarrow \delta(t) \propto a \propto t^{2/3}$$

Durante l'epoca della radiazione:

$$k << k_J \Rightarrow \delta(t) \propto a^2 \propto t$$

La materia è priva di pressione (equazione di stato *p~0*). Tuttavia, prima della ricombinazione materia (barionica) e radiazione costituiscono di fatto un unico fluido. È la radiazione a fornire la pressione che ostacola il collasso delle perturbazioni di dimensione minore della lunghezza di Jeans:

$$p_r = \rho_r c^2/3 \Rightarrow c_s = c/\sqrt{3}$$

$$\lambda_J = \left(\frac{\pi}{3}\frac{c^2}{G\overline{\rho}}\right)^{1/2} \approx ct_H \approx \lambda_H$$

Quindi, prima della ricombinazione, le perturbazioni di dimensione minore dell'orizzonte causale sono anche più piccole della scala di Jeans e non crescono. Solo dopo la ricombinazione la lunghezza d'onda di Jeans diventa nulla e le perturbazioni possono crescere. Ma questo significa:

$$\delta(t_0) \approx 1 \Leftrightarrow \delta(t_{rec}) \approx a_{rec} \approx 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-3} >> 10^{-5}$$

Un'eventuale materia oscura non-barionica invece non interagisce con la radiazione e può crescere già prima della ricombinazione (ma in realtà solo dopo l'equivalenza tra radiazione e materia):

$$\delta(t_0) \approx 1 \Leftrightarrow \delta(t_{eq}) \approx a_{eq} \approx 10^{-5} \Leftrightarrow \frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-5}$$

Questo è un ulteriore argomento a supporto dell'esistenza di materia oscura di tipo non-barionico.

La trattazione accurata dell’evoluzione delle perturbazioni viene fatta nel contesto della relatività generale, calcolando l’andamento di tutte le specie presenti nell’universo (fotoni, neutrini, barioni, materia oscura non barionica) attraverso integrazione numerica.