Fluido ideale omogeneo e isotropo

Classicamente, nel sistema di riferimento di quiete:

$$\dot{\rho} = 0, \ \ \nabla p = 0$$

Per analogia, il tensore energia impulso sarà:

$$T_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left(\rho(t)c^2, -p(t), -p(t), -p(t)\right)$$

di modo che: $\partial T_{\mu\nu} / \partial x_\mu = 0$

Con questa scelta per il contenuto dell'universo, si hanno solo due componenti indipendenti dell'equazione di Einstein:

$$\boxed{\begin{aligned} & R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = 8\pi T_{00} = 8\pi\rho \\ & R = -8\pi T = -8\pi(\rho - 3p) \end{aligned}} \Rightarrow \begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= -\frac{kc^2}{a^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}\left[\rho + \frac{3p}{c^2}\right] \end{aligned}$$

La seconda equazione può essere ottenuta derivando la prima (che esprime la conservazione dell'energia nel modello newtoniano) e combinandola con la prima legge della termodinamica:

$$d\left(\rho c^2 a^3\right) = -p\, d\left(a^3\right)$$

Cfr. espansione adiabatica: $dU = -pdV$

Per ricavare da questa l'andamento della densità in funzione del tempo bisogna conoscere l'**equazione di stato**, che lega fra loro densità e pressione:

Materia non relativistica: $p \cong \rho v_s^2 << \rho c^2 \Rightarrow p \cong 0 \Rightarrow \rho \propto a^{-3}$

Radiazione, materia relativistica: $p = \rho c^2 / 3 \Rightarrow \rho \propto a^{-4}$

Costante cosmologica

Con l'equazione di Friedmann che abbiamo visto (contenente materia ordinaria o radiazione) non si può ottenere un fattore di scala costante nel tempo. Prima della scoperta della legge di Hubble, Einstein introdusse una componente per rendere statico l'universo: la **costante cosmologica** Λ:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Scritta in questo modo (come la pensava Einstein), Λ è una costante fondamentale di natura, legata alla geometria dello spaziotempo vuoto. Possiamo però trasportarla nel tensore energia-impulso, ottenendo un contributo:

$$\boxed{T_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G} \Lambda g_{\mu\nu}}$$

cioè una componente con densità di energia non nulla e costante anche in uno spaziotempo completamente vuoto.

Costante cosmologica come energia del vuoto

Immaginiamo un pistone pieno di "vuoto". L'energia **aumenta** quando il pistone si espande adiabaticamente. Perché continui a valere la prima legge della termodinamica, la pressione deve essere **negativa** (bisogna <u>fare</u> lavoro per aumentare il volume)

$$dU = d\left(\rho c^2 V\right) = \rho c^2 dV = -p dV$$

Quindi, il vuoto deve avere equazione di stato: $\boxed{p = -\rho c^2}$

Questo si può vedere anche dall'espressione generale per il tensore energia-impulso del fluido ideale, nel caso di osservatori in moto:

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho c^2 + p\right) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}$$

Per il vuoto, il tensore non può dipendere dal moto dell'osservatore: questo è vero se l'equazione di stato è quella di sopra.

Costante cosmologica ed espansione

Che effetto ha l'introduzione della costante cosmologica sull'espansione dell'universo?

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3p/c^2\right)a > 0 \Leftrightarrow \rho + 3p/c^2 < 0$$

L'espansione è accelerata, poiché: $\rho + 3p/c^2 = -2\rho < 0$

Se c'è solo la costante cosmologica, si ha:

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow a \propto \exp\left(\left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2} t\right)}$$

Con le modifiche introdotte dalla RG, l'equazione di Friedmann diventa quindi:

$$\boxed{\begin{aligned}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= -\frac{kc^2}{a^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda c^2}{3}\\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}\left[\rho + \frac{3p}{c^2}\right] + \frac{\Lambda c^2}{3}\end{aligned}}$$

La densità e la pressione è quella totale di tutte le componenti. Separiamo i vari contributi, e usiamo la definizione del parametro di densità e del parametro di Hubble:

$$\begin{aligned}H^2(a) &= -\frac{kc^2}{a^2} + \frac{8\pi G}{3}\left[\rho_m(a) + \rho_r(a) + \rho_\Lambda(a)\right]\\ &= -\frac{kc^2}{a^2} + H^2(a)\left[\Omega_m(a) + \Omega_r(a) + \Omega_\Lambda(a)\right]\end{aligned}$$

da cui otteniamo: $\Omega(a) \equiv \Omega_m(a) + \Omega_r(a) + \Omega_\Lambda(a) = 1 \text{ se } k = 0$

Notare inoltre che: $\frac{kc^2}{a^2} = H^2(a)\left[\Omega(a) - 1\right] \Rightarrow kc^2 = H_0^2\left[\Omega - 1\right]$ Connessione tra geometria e contenuto!

usando gli andamenti delle densità: $\boxed{H^2(a) = H_0^2\left[(1-\Omega)a^{-2} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4} + \Omega_\Lambda\right]}$

Quindi l'andamento del fattore di scala a qualsiasi tempo si può ricavare dalla conoscenza dei **parametri cosmologici** al tempo attuale. Questi sono ricavabili dalle osservazioni.