

Fluido ideale omogeneo e isotropo

Classicamente, nel sistema di riferimento di quiete:

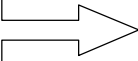
$$\dot{\rho} = 0, \quad \nabla p = 0$$

Per analogia, il tensore energia impulso sarà:

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho(t)c^2, -p(t), -p(t), -p(t))$$

di modo che: $\partial T_{\mu\nu} / \partial x_\mu = 0$

Con questa scelta per il contenuto dell'universo, si hanno solo due componenti indipendenti dell'equazione di Einstein:

$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 8\pi T_{00} = 8\pi\rho$ $R = -8\pi T = -8\pi(\rho - 3p)$		$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{kc^2}{a^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho$ $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left[\rho + \frac{3p}{c^2}\right]$
---	---	--

La seconda equazione può essere ottenuta derivando la prima (che esprime la conservazione dell'energia nel modello newtoniano) e combinandola con la prima legge della termodinamica:

$$d(\rho c^2 a^3) = -pd(a^3) \qquad \begin{array}{l} \text{Cfr. espansione} \\ \text{adiabatica:} \\ dU = -pdV \end{array}$$

Per ricavare da questa l'andamento della densità in funzione del tempo bisogna conoscere l'**equazione di stato**, che lega fra loro densità e pressione:

Materia non relativistica: $p \cong \rho v_s^2 \ll \rho c^2 \Rightarrow p \cong 0 \Rightarrow \rho \propto a^{-3}$

Radiazione, materia relativistica: $p = \rho c^2 / 3 \Rightarrow \rho \propto a^{-4}$

Costante cosmologica

Con l'equazione di Friedmann che abbiamo visto (contenente materia ordinaria o radiazione) non si può ottenere un fattore di scala costante nel tempo. Prima della scoperta della legge di Hubble, Einstein introdusse una componente per rendere statico l'universo: la **costante cosmologica** Λ :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Scritta in questo modo (come la pensava Einstein), Λ è una costante fondamentale di natura, legata alla geometria dello spaziotempo vuoto. Possiamo però trasportarla nel tensore energia-impulso, ottenendo un contributo:

$$T_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G} \Lambda g_{\mu\nu}$$

cioè una componente con densità di energia non nulla e costante anche in uno spaziotempo completamente vuoto.

Costante cosmologica come energia del vuoto

Immaginiamo un pistone pieno di "vuoto". L'energia **aumenta** quando il pistone si espande adiabaticamente. Perché continui a valere la prima legge della termodinamica, la pressione deve essere **negativa** (bisogna fare lavoro per aumentare il volume)

$$dU = d(\rho c^2 V) = \rho c^2 dV = -pdV$$

Quindi, il vuoto deve avere equazione di stato: $p = -\rho c^2$

Questo si può vedere anche dall'espressione generale per il tensore energia-impulso del fluido ideale, nel caso di osservatori in moto:

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}$$

Per il vuoto, il tensore non può dipendere dal moto dell'osservatore: questo è vero se l'equazione di stato è quella di sopra.

Costante cosmologica ed espansione

Che effetto ha l'introduzione della costante cosmologica sull'espansione dell'universo?

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p/c^2)a > 0 \Leftrightarrow \rho + 3p/c^2 < 0$$

L'espansione è accelerata, poiché: $\rho + 3p/c^2 = -2\rho < 0$

Se c'è solo la costante cosmologica, si ha:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow a \propto \exp\left(\left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2} t\right)$$

Con le modifiche introdotte dalla RG, l'equazione di Friedmann diventa quindi:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{kc^2}{a^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left[\rho + \frac{3p}{c^2}\right] + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

La densità e la pressione è quella totale di tutte le componenti. Separiamo i vari contributi, e usiamo la definizione del parametro di densità e del parametro di Hubble:

$$H^2(a) = -\frac{kc^2}{a^2} + \frac{8\pi G}{3}[\rho_m(a) + \rho_r(a) + \rho_\Lambda(a)]$$

$$= -\frac{kc^2}{a^2} + H^2(a)[\Omega_m(a) + \Omega_r(a) + \Omega_\Lambda(a)]$$

da cui otteniamo: $\Omega(a) \equiv \Omega_m(a) + \Omega_r(a) + \Omega_\Lambda(a) = 1$ se $k = 0$

Notare inoltre che: $\frac{kc^2}{a^2} = H^2(a)[\Omega(a) - 1] \Rightarrow kc^2 = H_0^2[\Omega - 1]$ Connessione tra geometria e contenuto!

usando gli andamenti delle densità:

$$H^2(a) = H_0^2 \left[(1 - \Omega)a^{-2} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4} + \Omega_\Lambda \right]$$

Quindi l'andamento del fattore di scala a qualsiasi tempo si può ricavare dalla conoscenza dei **parametri cosmologici** al tempo attuale. Questi sono ricavabili dalle osservazioni.

