Elementi di astrofisica 2
(a.a. 2008/09)

mer/ven – ore 9.00 – aula T6 bis

Amedeo Balbi

Stanza C 133
Tel. (06 7259) 4717
amedeo.balbi@roma2.infn.it

Testi consigliati

- Libro di testo:
  - P. Schneider: *Extragalactic Astronomy and Cosmology* (Springer-Verlag)
- Dispense delle lezioni in PDF, scaricabili da: http://www.fisica.uniroma2.it/balbi/eleastro2

L’universo su grande scala

La scienza che studia l’evoluzione e la struttura dell’universo nel suo complesso è la **cosmologia.**

La cosmologia è una scienza **osservativa.**

Si possono trascurare i dettagli: **galassie=punti.**

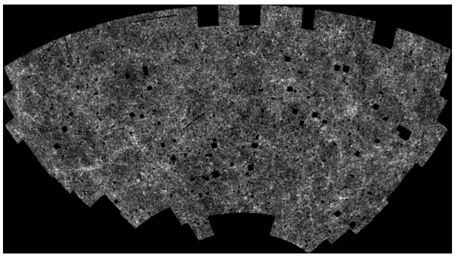
L’unica interazione che conta è la **gravità.**

Principio cosmologico: l’universo ha le stesse proprietà medie in ogni punto e in ogni direzione (ovvero è **omogeneo** e **isotropo**).

Ha anche le stesse proprietà per qualsiasi tempo?

La distribuzione delle galassie

L’universo osservabile ha un raggio di circa 46.5 miliardi di anni-luce. Si stima contenga circa 10^{11} galassie.



Es.: **APM survey**, mappa della distribuzione di galassie su una regione di 100x50 gradi quadrati intorno al Polo Sud Galattico.

In media, su scale angolari grandi, le galassie appaiono distribuite sul cielo in modo uniforme ➔ **isotropia.**

L’isotropia intorno a ciascun punto implica l’**omogeneità.**

N.B.: Il principio cosmologico vale solo in media (su scale grandi). C’è evidenza che la scala di omogeneità è ~ 100 Mpc.

Un universo in evoluzione?

Fatto osservativo: il cielo notturno è buio

Paradosso di Olbers (1823): in un universo **eterno**, **infinito** e **statico**, ogni linea di vista incontra almeno una sorgente luminosa (stelle o galassie, che si suppongono in numero infinito e distribuite uniformemente). Il cielo dovrebbe brillare come una stella.

Gusci sferici concentrici:

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

Numero di sorgenti in ogni guscio:

$$N = 4\pi r^2 n dr$$

Luminosità di ogni guscio:

$$L \propto N/r^2 = \text{cost.}$$

Almeno una delle ipotesi di partenza deve essere sbagliata. Oggi sappiamo che:
a) l'universo ha **un'età finita** e quindi non vediamo sorgenti oltre una certa distanza
b) l'universo si **espande** e il redshift rende non visibili le sorgenti più lontane

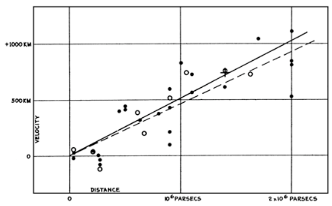
L'espansione dell'universo

Slipher (1922): tutte le galassie (distanti) hanno righe spettrali spostate verso la parte rossa dello spettro (**redshift**).

Interpretazione come effetto Doppler: tutte le galassie sembrano allontanarsi da noi.

$$z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{v}{c}$$

Hubble (1929) quantificò la dipendenza della velocità dalla distanza:

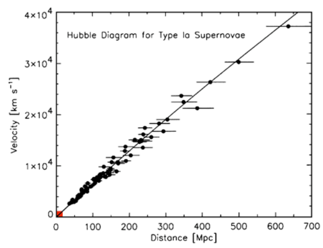


Legge di Hubble

$$\boxed{v = H_0 d}$$

$$H_0 \approx 70 \text{ km/s/Mpc}$$

costante di Hubble: uguale ovunque nell'universo, ma può variare nel tempo

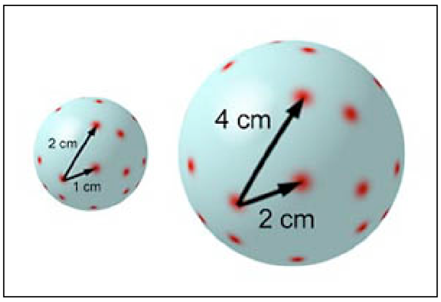


La legge di Hubble è esattamente quella che ci si aspetta in un **universo in espansione** uniforme.

Tutte le distanze tra coppie di punti aumentano di uno stesso fattore dopo un certo intervallo di tempo:

$$d \Rightarrow (1+f)d$$

$$v = \Delta d / \Delta t = fd$$



Inoltre, **se la velocità di espansione è costante nel tempo**, tutte le distanze sono nulle a un tempo finito nel passato: l'universo ha **un'età finita.**

$$d = vt_0$$

$$\Rightarrow v = (1/t_0)d$$

$$\Rightarrow t_0 = 1/H_0$$

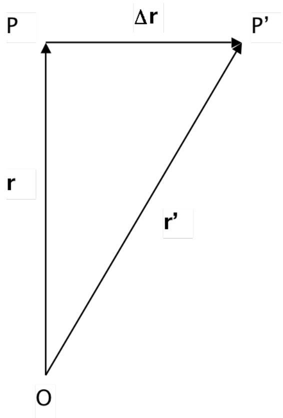
Ad esempio:

$H_0 = 70$ km/s/Mpc

$\Rightarrow t_0 = 13.9$ Gy

La forma lineare della legge di Hubble segue direttamente dall'omogeneità dell'universo.

Supponiamo di osservare la velocità di allontanamento dei punti P e P' da noi (che siamo in O) e mettiamola in relazione a quella relativa tra loro usando la composizione delle velocità:



$$\mathbf{v}'(\Delta\mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{r}') - \mathbf{v}(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{v}'(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{r}') - \mathbf{v}(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{r}') - \mathbf{v}(\mathbf{r})$$

(l'omogeneità impone la stessa forma funzionale)

Quindi la velocità deve essere una funzione lineare della distanza, ovvero:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = H(t)\mathbf{r}$$

Definiamo il **fattore di scala** come il rapporto delle distanze fra due punti qualsiasi a tempi diversi. Possiamo convenzionalmente scegliere come tempo di riferimento quello attuale:

$$\boxed{a(t) \equiv \mathbf{r}(t)/\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}/\mathbf{r}_0}$$

Notare che: $a(t_0) = 1$

(deve essere uno scalare in virtù dell'omogeneità e isotropia)

Vediamo come si riottiene la legge di Hubble in termini del fattore di scala:

$$\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t = \dot{a}(t)\mathbf{r}_0 = \dot{a}\mathbf{r}/a = H(t)\mathbf{r}$$

a patto di definire il **parametro di Hubble**: $\boxed{H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}}$

Nota: questo fattore di scala è adimensionale. Si usa anche: $R(t) \equiv a(t)R_0$

Trattazione newtoniana dell'espansione

Per l'isotropia, l'universo appare sfericamente simmetrico intorno a ogni punto. Ogni volume sferico evolve solo sotto la propria influenza. Le forze gravitazionali esterne al volume danno risultante nulla (teorema di Gauss).

L'equazione del moto di un punto sulla superficie di un volume sferico arbitrario è: $m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM(r)m}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$

$M(r) = \frac{4\pi}{3}r(t)^3\rho(t) = \frac{4\pi}{3}r_0^3\rho_0 = \mathrm{cost.}$ (la densità non dipende da r per l'omogeneità)

In termini del fattore di scala otteniamo: $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}G\frac{\rho_0}{a^3} = -\frac{4\pi}{3}G\rho$

(n.b.: da questo vediamo già che non possiamo avere un universo statico in presenza di materia)

Integrando rispetto al tempo, si ottiene: $\boxed{\dot{a}^2 - \frac{8\pi}{3}\frac{G\rho_0}{a} = -k}$

(k è una costante di integrazione)

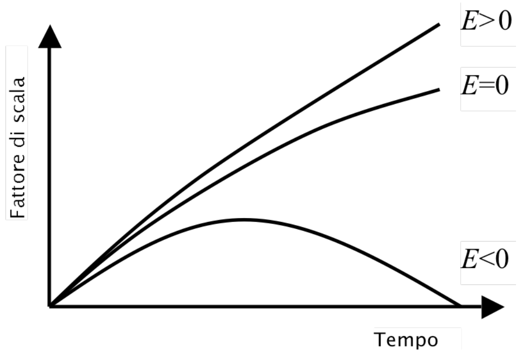
L'equazione appena trovata non è altro che la **conservazione dell'energia meccanica** del sistema. Infatti:

$$T \equiv \frac{1}{2} m\dot{r}^2 = \frac{1}{2} m\dot{r}_0^2 \dot{a}^2$$

$$U \equiv -\frac{GMm}{r} = -\frac{4\pi G}{3} m\rho r_0^2 a^2$$

$$\Rightarrow T + U \equiv E = \text{cost.} = -2k/mr_0^2$$

I casi con energia positiva, negativa o nulla (k<0, k>0, k=0) corrispondono a tre diversi comportamenti dinamici dell'espansione.



Equazione di Friedmann:

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho}$$

$k = 0$ (critico)	$k > 0$ (legato, "chiuso")	$k < 0$ (slegato, "aperto")
$a^{1/2}\mathrm{d}a = \left(\frac{8\pi G\rho_0}{3}\right)^{1/2}\mathrm{d}t$ $\Rightarrow a \propto t^{2/3}$	$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3}\frac{G\rho_0}{a} - k$ $0 = \frac{8\pi}{3}\frac{G\rho_0}{a_{max}} - k$	$\dot{a}^2 \rightarrow -k > 0$
L'universo si espande per sempre, ma la velocità di espansione tende a zero.	Il moto si arresta e si inverte ad un tempo finito: $a_{max} = \frac{8\pi}{3}\frac{G\rho_0}{k}$	La velocità di espansione è sempre positiva, il moto non si arresta mai.

Parametro di decelerazione: $\boxed{q \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}}$

viene da:
$a(t) = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^{\,2}(t - t_0)^2 + \cdots$

Nei modelli di universo che contengono solo materia, la derivata seconda del fattore di scala è sempre negativa:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\frac{\rho_0}{a^2} < 0$$

Notare che si può riscrivere:

$$q = \frac{4\pi G}{3}\frac{\rho}{H^2}$$

da cui ricaviamo facilmente:

$$\boxed{\begin{array}{l} k = 0 \Rightarrow q = 1/2 \\ k > 0 \Rightarrow q > 1/2 \quad (q \to \infty \text{ per } a \to a_{\max}) \\ k < 0 \Rightarrow 0 < q < 1/2 \end{array}}$$

Densità critica: $\boxed{\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}}$

Dipende dal tempo.
Al presente, se
$H_0 = 70$ km/s/Mpc
allora: $\rho_c \approx 10^{-29}$ g/cm^3

È quella per cui si ottiene il caso critico (k=0) nell'equazione di Friedmann:

$$k = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_c$$

Possiamo definire un **parametro di densità:** $\boxed{\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}}$

per cui i casi critico, aperto e chiuso corrispondono, rispettivamente, ai valori:

$$\Omega = 1 \quad (\Leftrightarrow k = 0)$$
$$\Omega < 1 \quad (\Leftrightarrow k < 0)$$
$$\Omega > 1 \quad (\Leftrightarrow k > 0)$$